メタ論論議

スモモンガー

平成 25 年 9 月 14 日

1　初めに

これからトーナメント制や、リーグ戦でのメタ、つまりどういうデッキが優勝しやすいかを議論していきたいと思う。この文書は、十分に一般化した議論を行っているので、トレーディングカードゲーム以外のあらゆるトーナメント、リーグ戦への適用が可能であるが、やはり、もっとも効果的なほは遊戯王や MTG などの勝ち負けの相性がはっきりしやすい、トレーディングカードゲームへの適用であると思う。

さっそく議論を開始していきたいが、その前にこの章ではこれから使う議論の用語について整理して解説したいと思う。

1.1　用語集

トーナメントやリーグのプレーヤーを a_n で表す。例えば四人制のトーナメントでは、プレイヤーは a_1, a_2, a_3, a_4 となる。プレイヤー a_i が a_j に勝つ確率を勝率といい、p_{ij} で表す。少しの考察で $p_{ij} = 1 - p_{ji}$ となることが分かる。$\alpha(i) = \sum_{i \neq j} p_{ij}$ を a_i の期待勝数と呼ぶ。$\alpha(i)$ はリーグ戦における期待勝数である。$\alpha(i) > \alpha(j) \forall i \neq j$ となる a_i を特に勝率的最強と呼ぶことにする。一見すると、勝率的最強はトーナメントやリーグ戦で優勝するのに有利だが、実際にはすべての場合にそういえるわけではない。それについては第２章、第３章で見ていくことにする。

2^n 人の固定トーナメント $(\beta(a_1, a_2, , , , a_{2^n}))$ とはあらかじめトーナメントの組み合わせが決まっている、2^n 人によるトーナメントのことである。例えば、$\beta(a_1, a_2, a_3, a_4)$ のトーナメント表は図 1 のようになる。参加人数を 2^n に指定したのはシードをなくし、議論を単純化するためで、実際には工夫すれば 2^n 人以外のトーナメントにも本文書で述べる議論は適用できる。暇があれば考えて見てもらいたい。さて、トーナメント $\beta(a_1, a_2, , , , a_{2^n})$ において、a_i が優勝する確率を $\delta(a_i|a_1, a_2, , , , a_{2^n})$ と表す。$\delta(a_i|a_1, a_2, , , , , , a_{2^n}) >$

図 1:

$\delta(a_j|a_1,a_2,,,,,,a_{2^n})\forall i \neq j$ となる a_i を特に固定トーナメントにおける最強と呼ぶことにする。

2^n 人の完全に公平なトーナメント ($\gamma(a_1,a_2,,,,a_{2^n})$) とは組み合わせが公平なくじ引き決められる 2^n 人によるトーナメントである。$\gamma(a_1,a_2,,,,a_{2^n})$ において a_i が優勝する確率を $\epsilon(a_i|a_1,a_2,,,,,a_m)$ と表す。$\epsilon(a_i|a_i|a_1,a_2,,,,,,a_{2^n}) > \epsilon(a_j|a_1,a_2,,,,,,a_{2^n})\forall i \neq j$ となる a_i を特に完全に公平なトーナメントにおける最強と呼ぶことにする。

m 人による n 回戦のリーグ ($\lambda(n|a_1,a_2,,,,a_m)$) とは、$m$ 人によるリーグ戦で、n 回それぞれのプレーヤー同士が戦うものである。$\lambda(n|a_1,a_2,,,,a_m)$ において、優勝数を以下のように定める。a_i の勝数が他のプレーヤーより多いとき、優勝数 1 を獲得する。もし、同率首位が k 人いる時は、$\frac{1}{k}$ を獲得する。a_i が優勝の期待値を $\zeta(n,a_i|a_1,a_2,,,,,a_m)$ と表す。$\zeta(n,a_i|a_1,a_2,,,,,,a_{2^n}) > \zeta(n,a_j|a_1,a_2,,,,,,a_{2^n})\forall i \neq j$ となる a_i を特にリーグ戦における最強と呼ぶことにする。

2 トーナメント制のメタ

トーナメント制のメタ、特に固定トーナメントのメタは単純である。実際次の式で表される。

定理 2.1. 固定トーナメント $\beta(a_1,a_2,,,,a_{2^n})$ の a_i の優勝確率の式は以下の漸化式で表される。

$$(i) i \leq 2^{n-1}\text{の時}\delta(a_i|a_1,a_2,,,a_{2^n}) = \delta(a_i|a_1,a_2,,,,a_{2^{n-1}}) * \sum_{2^{n-1}<j\leq 2^n} p_{ij} * \delta(a_j|a_{2^{n-1}+1},a_{2^{n-1}+2},,,,a_{2^n})$$

$$(ii) i > 2^{n-1}\text{の時}\delta(a_i|a_1,a_2,,,a_{2^n}) = \delta(a_i|a_{2^{n-1}+1},a_{2^{n-1}+2},,,,a_{2^n}) * \sum_{1<j\leq 2^{n-1}} p_{ij} * \delta(a_j|a_1,a_2,,,,a_{2^{n-1}})$$

証明. ほぼ自明だが一応 $i \leq 2^{n-1}$ の場合を証明する。優勝するということは、a_i の属する $\beta(a_1, a_2, , , , a_{2^{n-1}})$ のサブトーナメントで優勝し、決勝に勝ち残りさらに、決勝で勝つことである。言うまでもなく、サブトーナメントでの優勝確率は、$\delta(a_i|a_1, a_2, , , a_{2^{n-1}})$ である。そして、決勝での勝率であるが、これは $\displaystyle\sum_{2^{n-1}<j\leq 2^n} *(a_i$の a_jに対する勝率$)*(a_j$が決勝に残る確率$)$ である。よって与式を得る □

上の定理を見て読者は、なんだこれは、当たり前のことじゃないかと思わず叫びそうになっただろう。まったくもってそのとおりなのであるが、私が個人的にインターネットで調べてみても、この自明かつ美しく単純な漸化式を発見することができなかったのである。

さて、上の漸化式からどういうことが言えるだろうか。優勝する確率が高いプレイヤーは、自分の属するサブトーナメントでの優勝確率が高く、かつ、もうひとつのサブトーナメントでの優勝確率が高いプレイヤーに対する勝率が高いプレイヤーであることが分かる。次の例をそれを見てみよう。

例 2.1. $\beta(a_1, a_2, a_3, a_4)$ で $p_{12} = 0.8, p_{13} = 0.8, p_{14} = 0.1, p_{21} = 0.2, p_{23} = 0.2, p_{24} = 0.9, p_{31} = 0.2, p_{32} = 0.8, p_{34} = 0.8, p_{41} = 0.9, p_{42} = 0.1, p_{43} = 0.2$ とする。この時 $\alpha(1) = 1.7, \alpha(2) = 1.3, \alpha(3) = 1.8, \alpha(4) = 1.2$ なので勝率的最強は a_3 であるが、優勝確率を計算すると $\delta(a_1|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.528, \delta(a_2|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.068, \delta(a_3|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.256, \delta(a_4|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.148$ となる。よって、固定トーナメント、$\beta(a_1, a_2, a_3, a_4)$ の最強は a_1 である。

次に、完全に公平なトーナメントについて、考察しよう。まず、次の定理を見てみる。

定理 2.2. 完全に公平なトーナメント $(\gamma(a_1, a_2, , , , a_{2^n}))$ で a_i の一回戦の突破確率は以下の式で表される。

$$\frac{\alpha(i)}{2^n - 1}$$

証明. これもほぼ自明だが一応証明する。公平なトーナメントなので各 $a_j(j \neq i)$ に対して、a_i と一回戦で当たる可能性は $2^n - 1$ である。よって、一回戦を突破する確率は

$$\sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}}{2^n - 1} = \frac{\alpha(i)}{2^n - 1}$$

□

上の定理から優勝する気がなく、一回戦突破が目的なら勝率的最強を目指せばよいことが分かる。まあ、そんな人はあまりいないと思うが。では、いよいよ、完全に公平なトーナメントの優勝確率について見てみよう。

定理 2.3. 完全に公平なトーナメント *($\gamma(a_1, a_2, , , , a_{2^n})$)* で a_i の優勝確率は以下の式で表される。

$$\epsilon(a_i|a_1, a_2, , , , a_{2^n}) = \sum \frac{\delta(a_i|a_{i_{m1}}, a_{i_{m2}}, , , , a_{i_{m2^n}})}{2^n!}$$

証明. ほぼ自明だが (ry)。完全に公平なトーナメントなので、一つの固定トーナメント ($\beta(a_{i_{m1}}, a_{i_{m2}}, , , , , a_{i_{m2^n}})$) になる確率は $2^n!$ である。よって与式を得る □

読者の中にはなぜ定理 2.1 を使って定理 2.3 の式に代入しないのかと憤った方もいるだろう。実際に代入すること自体は難しくないのだが、表記法が筆者の力では分からないのだ。どういう風に書けばいいのか分かる人がいたら私に連絡してほしいのである。あと、定理 2.3 の式であるが、これはもっと簡単に計算できるようにすることが可能である。http://kakuritsu.com/tournament.html なども見てもらいたい。本文書では議論を簡単にするためこれを考慮しない。定理 2.1 と定理 2.3 を組み合わせれば、完全に公平なトーナメントでは決勝に勝ち残る可能性が高いプレイヤーに対して、高い勝率をあげれば優勝する可能性が高くなるのが分かる。次の例でみていこう。

例 2.2. $\gamma(a_1, a_2, a_3, a_4)$ で勝率は例 *2.1* と同じとする。その時の優勝確率はそれぞれ、$\epsilon(a_1|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.397, \epsilon(a_2|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.138, \epsilon(a_3|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.336, \epsilon(a_4|a_1, a_2, a_3, a_4) = 0.129$*(*小数点第四位は四捨五入*)* になる。この例でも、a_1 が優勝確率がもっとも高くなっているのが分かる。それは強い a_3 に対して強いからである。

3 リーグ戦のメタ

ここからはリーグ戦のメタを論ずる。一見すると、勝率的最強（つまり期待勝数が多いプレイヤー）が優勝するのに有利そうだが必ずしもそうではない。実際リーグ戦の選手が三人の場合次の定理がなりたつ。

定理 3.1. リーグ戦 $\lambda(1|a_1, a_2, a_3)$ で優勝数の期待値がもっとも高いプレイヤーキは全勝する確率が高いプレイヤーである

証明. リーグ戦 $\lambda(1|a_1, a_2, a_3)$ において a_i が優勝数を獲得するのは、全勝した時、または全員が 1 勝 1 敗でならんだときである。しかし、1 勝 1 敗で並ぶ確率は各 a_i について同じだから全勝する確率が高いプレイヤーが優勝数の期待値が高くなる □

例 3.1. $\lambda(1|a_1, a_2, a_3)$ で $p_{12} = 0.6$,$p_{13} = 0.6$,$p_{21} = 0.4$,$p_{23} = 0.85$,$p_{31} = 0.4$,$p_{32} = 0.15$ とする。この時 $\alpha(1) = 1.2$,$\alpha(2) = 1.25$,$\alpha(3) = 0.55$ なので勝率的最強は a_2 であるが、優勝数の期待地はそれぞれ $\zeta(1, a_1|a_1, a_2, a_3) =$

$0.44,\zeta(1,a_2|a_1,a_2,a_3=0.42)=0.42,\zeta(1,a_3|a_1,a_2,a_3)=0.14$ なのでリーグ戦 $\lambda(1|a_1,a_2,a_3)$ の最強は a_1 である。

上の例で一回しかプレイヤー同士が戦わないがこれが、二回、三回と増えていくとどうなるか気になる人も多いだろう。次の例で見ていこう。

例 3.2. $\lambda(2|a_1,a_2,a_3)$ で勝率は例 *3.1* と同じとする。この時 $\zeta(2,a_1|a_1,a_2,a_3)=0.44472, \zeta(2,a_2|a_1,a_2,a_3)=0.4714, \zeta(2,a_3|a_1,a_2,a_3)=0.08388$ になる。

例 3.2 から勝率的最強を優勝させたいのなら何回戦もリーグ戦で戦うことは意味がありそうである。私は次の仮説がなりたつと見ている。

仮説 3.1. a_i が勝率的最強である時

$$\lim_{n\to\infty}\zeta(n,a_i|a_1,a_2,,,a_k)=1$$

4 終わりに

まず、ここまでこの駄文を読んでいただいて本当に感謝したいのである。おそらくこの文書を読んで読者はなんだこの文書はトーナメント制ではほぼ自明なことしかいってないし、リーグ戦では三人という簡単な例しかできてないし、おまけに理論の根幹をなすべき重要な仮説が証明できてないじゃないかと叫んでいることだろう。まことにその通りなのである。しかし、残念ながら私の数学力ではこれが限界なのだ。私より才能のある数学者など腐るほどいると思うのである。そういった人に研究してもらいたいと思っているのだ。

あと、文書中の表記なのであるが正直言うとシグマ記号などの下の文字の書式などはよくわからなかったのである。もし、正しい表記法が分かる人がいたら私に連絡が欲しいのである。

最後に上ともかぶるが以下の項目に該当する人は私に連絡をしてほしいのである。

- 定理 2.1 を定理 2.3 に代入した式をエレガントに書く方法が分かる人
- シグマ記号の下の文字の正しい表記法の分かる人
- 4 人以上のリーグ戦の最強のエレガントな求め方の分かる人、もしくはしらみつぶしに調べなくてはならないと証明した人。
- 仮説 3.1 を証明した人

どうかよろしくお願いします。